特殊函数公式表

下列公式中，J_ν 和 N_ν 分别表示阶数为 ν 的第一类和第二类贝塞尔函数； Z_ν 表示 ν 阶柱函数（即任意固定的线性组合 $a\mathrm{J}_\nu + b\mathrm{N}_\nu$, a, b 均为和 ν 无关的常数）； j_ν 和 n_ν 分别表示第一类和第二类球贝塞尔函数； $\mathrm{Y}_{\ell m}$ 表示球面谐函数；P_ℓ 表示勒让德多项式；δ_{ij} 为克罗内克符号（当 $i=j$ 时为 1，否则为零）。

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, && (1)\\
\Gamma(2z) &= \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), && (2)\\
x! &\approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad (\mathrm{Re}\, x \gg 1) && (3)\\
\mathrm{J}_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, && (4)\\
\mathrm{N}_\nu(x) &= \lim_{\alpha\to\nu}\frac{\mathrm{J}_\alpha(x)\cos(\alpha\pi)-\mathrm{J}_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, && (5)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu Z_\nu(x)\right] &= x^\nu Z_{\nu-1}(x), && (6)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} Z_\nu(x)\right] &= -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x), && (7)\\
Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x) &= 2Z'_\nu(x), && (8)\\
Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}Z_\nu(x), && (9)\\
\mathrm{J}_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{当}x \gg \sqrt{|\nu^2-\frac{1}{4}|}), && (10)\\
\mathrm{N}_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{当}x \gg \sqrt{|\nu^2-\frac{1}{4}|}), && (11)\\
\mathrm{J}_m(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} e^{i(x\sin\theta-m\theta)}\mathrm{d}\theta, \quad (m\text{为整数}, a\text{为任意常数}), && (12)\\
e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)t^n, && (13)\\
\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\mu_i x)\mathrm{J}_m(\mu_j x)\,\mathrm{d}x &= \delta_{ij}\frac{\left[\mathrm{J}_{m+1}(\mu_i)\right]^2}{2}, \quad (\mu_1<\mu_2<\ldots\text{是}\mathrm{J}_m\text{的正实数零点}), && (14)\\
\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\lambda_i x)\mathrm{J}_m(\lambda_j x)\mathrm{d}x &= \delta_{ij}\frac{\left(1-\frac{m^2}{\lambda_i^2}\right)\left[\mathrm{J}_m(\lambda_i)\right]^2}{2}, \quad (\lambda_1<\lambda_2<\ldots\text{是}\mathrm{J}'_m\text{的正实数零点}), && (15)\\
\int_0^\infty \mathrm{J}_m(k_1 r)\mathrm{J}_m(k_2 r) r\,dr &= \frac{\delta(k_1-k_2)}{k_1}, \ (k_1, k_2>0), && (16)\\
\mathrm{j}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+1/2}(x), && (17)\\
\mathrm{n}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+1/2}(x), && (18)\\
\mathrm{j}_l(x) &= (-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\sin x}{x}, && (19)\\
\mathrm{n}_l(x) &= -(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\cos x}{x}, && (20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) &= \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}, && (21)\\
\mathrm{P}_\ell(\cos\theta) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\mathrm{Y}_{\ell 0}(\theta,\phi), && (22)\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k, && (23)\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(-1)^{\ell-k}(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^k, && (24)\\
\mathrm{P}_{2n}(x) &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\left[2(n+k)\right]!}{(n+k)!(n-k)!(2k)!}x^{2k},\quad (n\text{为非负整数}) && (25)\\
\mathrm{P}_{2n+1}(x) &= \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\left[2(n+k+1)\right]!}{(n+k+1)!(n-k)!(2k+1)!}x^{2k+1},\quad (n\text{为非负整数}) && (26)\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell, && (27)\\
(2\ell+1)x\mathrm{P}_\ell(x) &= (\ell+1)\mathrm{P}_{\ell+1}(x)+\ell\mathrm{P}_{\ell-1}(x), && (28)\\
(2\ell+1)\mathrm{P}_\ell(x) &= \mathrm{P}'_{\ell+1}(x)-\mathrm{P}'_{\ell-1}(x), && (29)\\
\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)dx &= \frac{2}{2m+1}\delta_{mn}, && (30)\\
\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{P}_\ell(x)t^\ell,\ (t<|x\pm\sqrt{x^2-1}|), && (31)\\
\mathrm{P}_\ell(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2) &= \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)\mathrm{Y}_{\ell m}(\mathbf{n}_2), && (32)
\end{aligned}
$$